Лекция 2
НУЛИ ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ КОНЕЧНОГО ПОРЯДКА. ТЕОРЕМЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ

Класс аналитических функций в области D обозначим через $A(D)$. Пусть $M(R) = \max\limits_{|z|\le R}|f(z)| = \max\limits_{|z|=R}|f(z)|, \quad f(z) \in A(\mathbb{C})$.

Теорема 2.1. Пусть $F(z) \in A(|z| \le R)$, $R > 0$ и имеет по меньшей мере n нулей $a_1, a_2, ..., a_n$ в открытом круге $|z| < R$ и $F(0) \ne 0$. Тогда справедливо неравенство

$$\frac{R^n}{|a_1a_2\cdots a_n|} \le \frac{M(R)}{F(0)}, \quad M(R) = \max_{|z|=R}|F(z)|.$$

Доказательство. Положим $F(z) = \varphi(z)\prod\limits_{\nu=1}^{n}\dfrac{R(z-a_\nu)}{R^2-\bar{a}_\nu z}$, функция $\varphi(z) \in A(|z| \le R)$. Функция $W(z) = \dfrac{R(z-a_\nu)}{R^2-\bar{a}_\nu z}$ отображает конформно круг $|z| < R$ на круг $|W| < 1$ (см., например, [3]). Поэтому

$$|F(z)| = |\varphi(z)| \le M(R), \qquad |z| = R.$$

По принципу максимума модуля отсюда следует, что $|\varphi(0)| \le M(R)$ и тем самым

$$|F(0)| = |\varphi(0)|\prod_{\nu=1}^{n}\frac{|a_\nu|}{R} \le M(R)\prod_{\nu=1}^{n}\frac{|a_\nu|}{R}$$

или окончательно

$$\frac{R^n}{|a_1a_2\cdots a_n|} \le \frac{M(R)}{|F(0)|}. \quad \blacksquare$$

Рассмотрим последовательность $\{\lambda_n\}$, $\lambda_n \in \mathbb{C}$, $|\lambda_n| \uparrow \infty$, $\lambda_1 \ne 0$. Пусть существует $\alpha > 0$ такое, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{|\lambda_n|^\alpha}$ сходится. Пусть τ — точная нижняя грань таких α: $\tau = \inf\alpha$. Назовем τ *показателем сходимости последовательности* $\{\lambda_n\}$.

Если τ конечно, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{|\lambda_n|^{\tau+\varepsilon}}$ сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{|\lambda_n|^{\tau-\varepsilon}}$ расходится, $\varepsilon > 0$.

Пусть $f(z) \in A(\mathbb{C})$, имеет конечный порядок ρ, тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 2.2. Если целая функция $f(z)$ конечного порядка ρ имеет бесконечно много нулей $\{\lambda_n\}$, $\lambda_1 \neq 0$, $|\lambda_n| \uparrow \infty$, то показатель сходимости τ последовательности $\{\lambda_n\}$ меньше или равен ρ.

Доказательство. Можно считать, что $f(0) \neq 0$. Положим $r_n = |\lambda_n|$, $R = 2r_n$. В круге $|z| \leq R$ у функции $f(z)$ имеется по крайней мере n нулей $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. По теореме 2.1 справедливы неравенства

$$2^n = \left(\frac{R}{r_n}\right)^n \leq \frac{R^n}{|\lambda_1 \cdots \lambda_n|} \leq \frac{M(2r_n)}{f(0)} < e^{r_n^{\rho+\varepsilon}}, \quad \varepsilon > 0, \ n \geq n_0.$$

Отсюда следует цепочка неравенств

$$n \ln 2 < r_n^{\rho+\varepsilon}, \ \ n < r_n^{\rho+2\varepsilon}, \ \ r_n > n^{\frac{1}{\rho+2\varepsilon}}, \ \ r_n^{\rho+3\varepsilon} > n^{\beta}, \quad \beta = \frac{\rho+3\varepsilon}{\rho+\varepsilon} > 1, \ \varepsilon > 0.$$

Поэтому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{|\lambda_n|^{\rho+3\varepsilon}}$ сходится и показатель сходимости τ последовательности $\{\lambda_n\}$ меньше или равен ρ: $\tau \leq \rho$. ■

Рассмотрим пример. Функция $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$, $f(z) \in A(\mathbb{C})$. Порядок $\rho = 1$, $\lambda_n = \pm \pi n$, $n \in \mathbb{N}$. Показатель сходимости $\tau = 1$.

Задача. Привести пример функции $f(z) \in A(\mathbb{C})$, имеющей конечный порядок $\rho \neq 0$ и бесконечно много нулей, но показатель сходимости нулей $\tau < \rho$.

Пусть теперь функция $f(z) \in A(\mathbb{C})$ имеет порядок ρ, $0 < \rho < +\infty$ и конечный тип σ. Справедлива следующая теорема.

Теорема 2.3. Если $f(z) \in A(\mathbb{C})$, $0 < \rho < +\infty$, $\sigma < +\infty$ и имеет бесконечно много нулей $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots, \lambda_1 \neq 0$, $|\lambda_n| \uparrow \infty$, то

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{n}{|\lambda_n|^{\rho}} \leq \sigma e \rho.$$

Доказательство. Будем считать, что $f(0) \neq 0$. Пусть $r_n = |\lambda_n|$, $R = \alpha r_n$, $\alpha > 1$. В круге $|z| \leq R$ функция $f(z)$ имеет по крайней мере нули $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. По теореме 2.1 справедливы неравенства

$$\alpha^n = \left(\frac{R}{r_n}\right)^n \leq \frac{R^n}{|\lambda_1| \cdots |\lambda_n|} \leq \frac{M(\alpha r_n)}{|f(0)|} < e^{(\sigma+\varepsilon)\alpha^{\rho} r_n^{\rho}}, \quad \varepsilon > 0, \ n \geq n_0,$$

$$n\ln\alpha \le (\sigma+\varepsilon)\alpha^\rho r_n^\rho, \quad \frac{n}{r_n^\rho} \le (\sigma+\varepsilon)\frac{\alpha^\rho}{\ln\alpha}.$$

Тем самым имеем

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{n}{|\lambda_n|^\rho} \le \frac{\sigma\alpha^\rho}{\ln\alpha}.$$

Взяв $\alpha = e^{1/\rho}\left(\text{эта точка, в которой достигается } \min\limits_{\alpha>1}\frac{\alpha^\rho}{\ln\alpha}\right)$, получаем

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{n}{|\lambda_n|^\rho} \le \sigma e\rho. \quad ■$$

Задача. Привести пример функции $f(z) \in A(\mathbb{C})$, имеющей порядок ρ, $0 < \rho < +\infty$ и конечный тип σ, для которой выполнено равенство

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{n}{|\lambda_n|^\rho} = \sigma e\rho.$$

Обозначим класс функций $f(z) \in A(|z| < 1)$, ограниченных по модулю, через $B(|z| < 1)$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 2.4. Пусть $F(z) \not\equiv 0$, $F(z) \in B(|z| < 1)$. Если функция $F(z)$ имеет бесконечно много нулей $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, $0 < |a_n| < 1$, $|a_n| \uparrow$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-|a_n|)$ сходится.

Доказательство. Можно считать, что $F(0) \not\equiv 0$. Пусть $0 < R < 1$ и $|a_n| < R$. По теореме 2.1 имеем

$$\frac{R^n}{|a_1\cdots a_n|} \le \frac{M(R)}{|F(0)|} \le C \quad (C \text{ — const}).$$

Устремив R к единице, будем иметь $\dfrac{1}{|a_1\cdots a_n|} \le C$. Неравенство справедливо для $\forall n \in \mathbb{N}$. Так как $|a_\nu| < 1$, то

$$\frac{1}{|a_\nu|} = 1+\alpha_\nu, \ \ \alpha_\nu = \frac{1-|a_\nu|}{|a_\nu|}, \ \ \alpha_1+\ldots+\alpha_n \le (1+\alpha_1)\cdots(1+\alpha_n) = \frac{1}{|a_1|\cdots|a_n|}.$$

Тем самым ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ сходится, будет сходиться и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-|a_n|)$. ■

Докажем теперь несколько **теорем единственности.**

Теорема I. Пусть $F(z) \in B(|z| < 1)$. Если $F(z)$ обращается в нуль в точках $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots, |a_n| < 1, |a_n| \uparrow$, причем $\sum_{n=1}^{\infty}(1-|a_n|)$ расходится, то $F(z) \equiv 0$.

Доказательство. Предположив, что $F(z) \not\equiv 0$, и применив теорему 2.4, получим, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(1-|a_n|)$ сходится, что противоречит условию теоремы. ■

Теорема II. Пусть функция $f(z) \in A(\mathbb{C})$ и имеет порядок, не больший $\rho < \infty$. Если функция $f(z)$ обращается в нуль в точках $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots, |\lambda_n| \uparrow \infty$, причем показатель сходимости τ последовательности $\{\lambda_n\}$ больше ρ $(\tau > \rho)$, то $f(z) \equiv 0, z \in \mathbb{C}$.

Доказательство. Доказательство следует из теоремы 2.2, так как, предположив, что $f(z) \not\equiv 0$, мы получили бы, что $\tau \le \rho$, что противоречит условию данной теоремы. ■

Теорема III. Пусть функция $f(z) \in A(\mathbb{C})$ и ее порядок не выше ρ, а при порядке, равном ρ, тип не выше $\sigma < \infty$. Если функция $f(z)$ обращается в нуль в точках $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots, |\lambda_n| \uparrow \infty$, причем $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{n}{|\lambda_n|^{\rho}} > \sigma e \rho$, то $f(z) \equiv 0, z \in \mathbb{C}$.

Доказательство. Доказательство теоремы следует из теоремы 2.3. Если $f(z) \not\equiv 0$ и ее порядок $\rho_f < \rho$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{|\lambda_n|^{\rho_f+\varepsilon}}$, $\varepsilon > 0$ сходится и тем самым $\dfrac{1}{|\lambda_n|^{\rho_f+\varepsilon}} \to 0, n \to \infty$, но так как $|\lambda_n| \uparrow \infty$, то

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n}{|\lambda_n|^{\rho_f+\varepsilon}} \le 1,$$

отсюда

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n}{|\lambda_n|^{\rho}} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n}{|\lambda_n|^{\rho_f+\varepsilon+(\rho-(\rho_f+\varepsilon))}} = 0, \quad \rho - (\rho_f + \varepsilon) > 0.$$

Пришли к противоречию.

Если $\rho_f = \rho$ и тип $\sigma < \infty$, то, предположив, что функция $f(z) \not\equiv 0$, по теореме 2.3 будем иметь

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n}{|\lambda_n|^\rho} \le \sigma e \rho.$$

Отсюда приходим к противоречию. ■

Задачи

I. Найти нули функции $f(z) = e^{e^z} - 1$ и показать, что они не имеют конечного показателя сходимости.

II. Пусть функция $g(t) \in C[a, b]$. Доказать, что функция $f(z) = \int_a^b e^{izt} g(t)dt$:

1) целая конечного порядка;
2) при $z \to \infty$ по вещественной оси $f(z) \to 0$;
3) имеет бесконечно много нулей.

III. Доказать, что функция Бесселя

$$\mathfrak{I}_\nu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu z^{2n+\nu}}{2^{2n+\nu}\Gamma(\nu+n+1)}, \quad \nu > -1$$

есть целая функция, имеет бесконечно много нулей и все ее нули вещественные.